〈書評〉

Terry L. Friesz, *Dynamic optimization and differential games*, Springer, 2010, xiv+499pp.

藤　原　憲　二

This article has two purposes. First, we review the newly published book on differential games by Terry L. Friesz. Second, relating this book to the existing literature on differential games in English and Japanese, we provide a study guideline for those who are interested in differential games in economics.

Kenji Fujiwara

1　導入

微分ゲームに関する新たな専門書 Friesz, Terry L. (2010), *Dynamic optimization and differential games*, Springer が出版された。微分ゲームの定義は以下で詳説するが、1980 年代以降社会科学の幅広い分野に応用され、経済学においても静学ゲームでは得られなかった新たな知見を提供している。この事実を反映して 2000 年には経済学における微分ゲームのバイブルとも言える Dockner *et al.* (2000) が、2010 年にはその後の 10 年間の発展を加味した Long (2010) が出版された[1)]。また 2011 年には微分ゲームの専門誌である *Dynamic Games and Applications* が公刊される。その中において上掲書の出版は時宜を得たものである。

微分ゲームとは状態変数の時間的な動きを表す微分方程式の制約の下で、プ

1)　以上の事情から Long (2010) では最初に微分ゲームの入門的説明を付しているものの、一定の知識を有する人向けである。

レーヤーが自分の生涯利得を最大化するように戦略の時間流列を決めるゲームである。この時各プレーヤーの戦略変数が制約となる微分方程式の中に入っており、彼らは自分の行動が状態変数の動きを変化させるということまで考慮に入れて最適化を行う。これはそもそも状態変数を含まない、あるいは時間を通じて一定である多段階ゲームや繰返しゲームと大きく違う微分ゲームの特徴であり、この特徴ゆえに微分ゲームの解法には最大値原理・動学計画法といった動学最適化（最適制御）理論が必要となる。今 2 プレーヤーを考えると典型的な微分ゲームは次のように定式化される。

$$\max_{x_i} \int_0^\infty e^{-r_i t} f^i(x_i, x_j, k) dt$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{k} \equiv \frac{dk}{dt} = g(x_i, x_j, k),\ k(0):\ \text{given},\ j \neq i,\ r_i \geq 0.$$

ここで x_i はプレーヤー i の戦略変数、k は状態変数、$f^i(\cdot)$ はプレーヤー i の瞬時的（instantaneous）利得関数、$g(\cdot)$ は制約式、r_i は割引率を表す。なおここでは無限視野を仮定している[2)]。また関数 $f^i(\cdot), g(\cdot)$ に t が直接入っていないこの種の問題は自律的（autonomous）問題と呼ばれ、経済学ではこれを考えるのが圧倒的である[3)]。

上の定式化から微分ゲームの解法に動学最適化理論が必要なのは自ずと理解できる[4)]。今はどこの大学院でもコースワークのマクロ経済学で最適成長理論やリアルビジネスサイクル理論が講義され、その準備として動学最適化の基礎、特にハミルトン関数とベルマン方程式の使い方は必ず紹介されるから微分ゲームへの障壁はそれほど高くない。このことを理解するために上の問題を具体的に解いてみよう。微分ゲームでは 2 つの解概念を考える。一方はオープン

2) 厳密には x_i, k は $x_i(t), k(t)$ と書くべきであるが、表記上の単純化のため t を省略する。

3) さらに状態変数が複数あり制約式が次のような場合も同様の議論が可能である。

$$\dot{k}_l = g_l(x_i, x_j, k_l),\ l = 1, \cdots, n.$$

4) しかし実は下村（2003, 2004）が明快に示しているように離散時間・有限期間を仮定すれば、必ずしも動学最適化理論を用いる必要はない。

ループ解であり他方はフィードバック解である[5)]。オープンループ戦略とは各プレーヤーが毎期の戦略変数の流列を初期に決め、以後はそれを忠実に実行すること（プレコミットメント）を仮定する。よって λ_i を制約式に付す補助変数としてプレーヤー i のハミルトン関数を $H_i = f^i(x_i, x_j, k) + \lambda_i g(x_i, x_j, k)$ と定義すると最適化の 1 階条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H_i}{\partial x_i} = f_i^i + \lambda_i g_i \\ \dot{\lambda}_i &= r_i\lambda_i - \frac{\partial H_i}{\partial k} = (r_i - g_k)\lambda_i - f_k \\ \dot{k} &= \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_i} = g \\ 0 &= \lim_{t\to\infty} e^{-r_i t}\lambda_i k. \end{aligned}$$

ここで $f^i(\cdot), g(\cdot)$ に付けた下添字は偏微分を表す。同じ条件をプレーヤー j についても求めればそれらがオープンループ・ナッシュ均衡を構成する。

他方フィードバック戦略は各プレーヤーの戦略変数を各期における状態変数の実現値の関数として定義し、次のようにして特徴づけられる。プレーヤー i はプレーヤー j がフィードバック戦略 $x_j(k)$ を選んでいると想定して最適化を行うため、プレーヤー i のハミルトン関数は $H_i = f_i(x_i, x_j(k), k) + \lambda_i g(x_i, x_j(k), k)$ となる。すると最適化の 1 階条件は次のようになる[6)]。

5) 経済学の文献ではクローズドループ、フィードバック、マルコフ完全という 3 語が同じものを指すように用いられる。このうちフィードバックとマルコフ完全は全く同じものを指すが、厳密にはクローズドループとフィードバック（マルコフ完全）には差異がある。詳細は Basar and Olsder (1995) を参照のこと。ただし多くの経済学で想定される自律的問題を考える際にはこの差異は無視できるため、本稿ではフィードバックという語を使う。

6) 動学計画法を使うと次のようになる。$V_i(k)$ をプレーヤー i の価値関数とするとハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式は $r_i V_i(k) = \max_{x_i} \left\{ f^i\left(x_i, x_j(k), k\right) + V_i'(k) g\left(x_i, x_j(k), k\right) \right\}$ と定義でき、最適化の 1 階条件は次のようになる。

$$f_i^i + V_i'(k) g_i = 0.$$

この式を満たす x_i は $V_i'(k), x_j(k)$ の関数として $x_i\left(V_i'(k), x_j(k)\right)$ と表すことができるので、これをハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式の右辺に代入すると次のような恒等式を得る。

$$r_i V_i(k) = f^i\left(x_i\left(V_i'(k), x_j(k)\right), x_j(k), k\right) + V_i'(k) g\left(x_i\left(V_i'(k), x_j(k)\right), x_j(k), k\right).$$

これと同じものがプレーヤー j についても得られる。その 2 式を $x_i(k), x_j(k)$ について連立させて解けばフィードバック・ナッシュ均衡が求められる。

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial H_i}{\partial x_i} = f_i^i + \lambda_i g_i \\
\dot{\lambda}_i &= r_i\lambda_i - \frac{\partial H_i}{\partial k} = (r_i - g_k)\lambda_i - f_k - \left(f_j^i + \lambda_i g_j\right) x_j'(k) \\
\dot{k} &= \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_i} = g \\
0 &= \lim_{t\to\infty} e^{-r_i t}\lambda_i k.
\end{aligned}
$$

同じ条件をプレーヤー j について出せばフィードバック・ナッシュ均衡を特徴づけることができる。

ここで明らかになったことは数学的な形式自体はコースワークのマクロ経済学で教えられる動学最適化理論と何ら変わらないということである。だが国内外を問わず微分ゲームを応用する経済学者は少ない。その理由としては（1）マクロ経済学者は成長率の決定や景気変動といった集計変数の決定・変動に主な関心があり企業間・政府間のゲーム的状況というミクロ的な細部には関心がない、またはゲームを考えると主体間の依存関係に焦点が置かれる結果、成長・変動への焦点がぼやけてしまう、（2）応用経済学者は分析・計算が簡単なワンショット・ゲームかせいぜい繰返しゲームを好み微分方程式や動学最適化を必要とする微分ゲームに踏込む気がない、（3）（2）と関連するが、上述の通り微分ゲームは主に 2 つの解概念を考えるが、現在の経済学者は概ねフィードバック解の方が解概念としてはより適切であるという見解で一致している。だがフィードバック解の解析は往々にして複雑になり、‘手計算’ による解析が不可能になるきらいがあるという 3 つが挙げられよう[7)]。

本書はこの状況を打破する強力な文献になると確信するが、上述の通り微分ゲーム自体がまだ経済学の中では広く普及していない現実を鑑みて本稿では本書と既存文献とを比較しながら微分ゲームの解説書・解説論文のサーベイを行う。その意味で本稿は書評であると同時に微分ゲームの文献の広範な紹介論文としての特徴も持たせる。

本稿の構成は次の通りである。第 2 節ではまず本書の内容を紹介する。そ

7) 上で求めたオープンループとフィードバックの最適化の 1 階条件を比べてみると、この点は容易に理解できる。

れを踏まえて第 3 節では既存の専門書・教科書に比して本書がどのような点で差別化されているかを述べる。第 4 節ではさらに日本語の微分ゲームに関する解説論文にまで視点を広げ本書の位置づけを明らかにする。第 5 節は結語である。

2 Dynamic optimization and differential games の紹介

以上の準備を経て本書の内容を概観する。本書の章立ては次の通りである。

1. Introduction
2. Nonlinear programming and discrete-time optimal control
3. Foundations of the calculus of variations and optimal control
4. Infinite dimensional mathematical programming
5. Finite dimensional variational inequalities and Nash equilibria
6. Differential variational inequalities and differential Nash games
7. Optimal economic growth
8. Production planning, oligopoly and supply chains
9. Dynamic user equilibrium
10. Dynamic pricing and revenue management

本書ははしがきの冒頭で述べられているようにオープンループ・ゲームのみを扱う。これが本書の章立てにも強く影響しており、必要な動学最適化の手法も変分法と最大値原理に限られ、動学計画法に費やされる紙幅は数ページに限られる。なぜならオープンループ解を求めるのに動学計画法は不要で、変分法または最大値原理で充分だからである。これを念頭に置いて以下で各章の内容を簡潔に見る。

第 1 章では動学最適化と微分ゲームの経済学・経営科学における例を紹介する。第 2 章はキューン＝タッカー条件を核とする非線形計画法（静学最適化理論）を説明し、そこから離散時間の最大値原理を導出する。第 3 章は連続時間に議論を移し、変分法と最大値原理の証明と幾つかの応用例を示す。第 4 章は

それらを無限視野問題に拡張する。第 5 章は静学的なナッシュ・ゲームとナッシュ均衡を説明する。以上の議論を統合し第 6 章はオープンループ・ゲームを紹介する。以降は応用例の解説で、第 7 章は最適成長理論、第 8 章は産業組織論・企業経済学、第 9 章は動学的な使用者均衡（dynamic user equilibrium）を考察する。

本書は大著であるから子細な点に立入った評価は避け、本書を手に取った読者に有益であろう点に絞り大きな点のみコメントする。第 1 は本書がオープンループ解しか扱っていない点には大いに不満がある。上述の通り、経済学においてはフィードバック解の方が妥当な解概念であるという認識が一般的であり筆者も同意する。フィードバック解は別書を参照せねばならないのは本書の最大の弱点である。第 2 ははしがきで筆者自身が述べていることだがシュタッケルベルク的な先導者－追随者ゲーム及び不確実性を考慮した確率微分ゲームの説明がない。ただこれらは Dockner *et al.* (2000) で詳説されているから、わざわざ本書で取上げる必要性は低い。第 3 は取上げられた例が最適成長と寡占を除いて経済学者には馴染みのないものが多い点である。これらについては筆者が工学・経営科学を専攻している点を考えれば無理もない。

最後の批評は動学最適化理論の説明に関してである。本書は動学最適化理論として変分法を導入し、後に最大値原理が紹介されている。歴史的には変分法が先に発展したことを反映してのことで、Seierstad and Sydsaeter (1986), Kamien and Schwartz (1990), Chiang (1995) も同じ展開の仕方を取っている。そのために本書もこの 3 冊も動学計画法の扱いがぞんざいになっている。筆者はこのスタイルに強い懸念を感じる。なぜなら少なくとも経済学においては最大値原理と動学計画法が最も広範に利用されており、特に離散時間の問題は専ら動学計画法が利用される。よって読者が自分で経済学の論文を読み、自らモデルを構築・解析できるようになるためには最大値原理と動学計画法を優先的に学ぶべきである。Dixit (1990) や Leonard and Long (1992) はこの方針に沿っており筆者もそれに同意する。変分法が最大値原理や動学計画法を学ぶ際に有益であることには疑いないが、最初に学ぶべきかどうかは疑問が残る。

3 既存文献（洋書）との比較

既に経済学への応用を念頭に書かれた微分ゲームの教科書・専門書は存在する。Basar and Olsder (1995), Mehlmann (1988), Dockner *et al.* (2000), Long (2010) がそうである[8)]。また微分ゲームを専門的に扱ったものではないが、動学最適化理論の教科書で微分ゲームに触れているものとして Seierstad and Sydsaeter (1986), Kamien and Schwartz (1991) がある。

以上の文献と比べた本書の最大の強みは動学最適化理論と微分ゲームのバランスの良さである。Seierstad and Sydsaeter (1986), Kamien and Schwartz (1991) は動学最適化理論の教科書であり微分ゲームへのページ数は少ない。Kamien and Schwartz (1991) は 1 章を微分ゲームに割いているが、それだけでは微分ゲームのフレーバーは感じられてもそれを自分で使って論文を書くのは難しい。Basar and Olsder (1995) も有名な微分ゲームの専門書であるが、数学書というべきものであり記述は難解である。Mehlmann (1988), Dockner *et al.* (2000) は理論と応用の両方を盛込んでおり、特に Dockner *et al.* (2000) は理論・応用共に非常に充実しており微分ゲームの論文では必ず引用されている。Mehlmann (1988) はコンパクトに微分ゲームの理論と応用をまとめているが動学最適化の解説は全くなく、致し方ないが 90 年代以降の微分ゲームの発展が欠けており応用例も古典的なものに限定されている[9)]。更にフィードバック解を一貫して最大値原理で導出しており、動学計画法で導出するのが主流である今から見ると動学計画法によるアプローチも載せてほしかった。だが幸いこの点は Long (2010) で充分にカバーされており、広範な分野における最新の応用例がカバーされている。Dockner *et al.* (2000) は 1 章を動学最適化理論に割いておりコンパクトながら優れた動学最適化の解説を行っている。よって Dockner *et al.* (2000) 1 冊でも動学最適化理論と微分ゲームの両方を習得し、自分で論文を書くところまで到達することは十分可能である。しかし

8) ここでは論文集は省いた。

9) 経済学で微分ゲームが広範に使われるようになったのは 80 年代後半に入ってからである。これは成長理論・景気変動理論の発展に伴い、動学最適化理論が経済学で広く用いられるようになったことが大きな理由であろう。

本書ほど動学最適化に力点が置かれておらず、動学最適化理論の理解を徹底させようとすれば結局は別の専門書に当たらねばならない。要するに既存文献は動学最適化と微分ゲームのバランスに欠けている。もちろん動学最適化を説明することは微分ゲームの本の役目ではなく Seierstad and Sydsaeter (1987), Kamien and Schwartz (1992), Leonard and Long (1992), Chiang (1995) など優れた教科書があるから、微分ゲームだけに特化してもよいという思いも分かる。ただ本書はその逆の戦略を取り動学最適化と微分ゲームのバランスに細心の注意を払っておりこの点は本書を他書と大きく差別化するものである。

本書の第 2 の強みは Kamien and Schwartz (1992), Dockner *et al.* (2000), Long (2010) で紹介されていない産業組織論や経営科学の応用例が紹介されている点である。ただしマクロ経済学や環境・資源経済学における例は Dockner *et al.* (2000) の方が圧倒的に質・量共に優れていることは述べておいてもよかろう。

4　邦語文献との比較

前節では洋書の比較を行った。微分ゲームの邦書は筆者の知る限りないが解説論文が幾つかある。柴田・竹田（1997）は（筆者の知る限り）微分ゲームに関する最初の日本語の解説論文であり内容は全く古くない[10)]。特に微分ゲーム理論における大きな貢献である Tsutsui and Mino (1990), Shimomura (1991) の非線形フィードバック戦略に関する議論が丁寧にフォローされている点は重要である。三野（1985, 1986）は微分ゲームにも触れているが、タイトルが示す通り時間整合性についての論文でありその内容を理解するには既に一定の微分ゲームの知識が要請される。下村（2003, 2004）は 3 期間モデルを解析的に解いて微分ゲームの基本概念であるオープンループ解とフィードバック解の初等解説をしている。下村（2003, 2004）の特徴は最大値原理や動学計画法を使わず微分計算だけで微分ゲームの諸概念が分かることである[11)]。ただそこで使われているモデルは第 1 節で紹介したような無限視野・連続時間の定式化

10) 柴田（2006）は柴田・竹田（1997）のダイジェスト版である。
11) 実際、時間はかかるが学部生でも充分に読破できる。

を取っていないため、専門誌で扱われる微分ゲームとの隔たりが大きい。板谷（2006）は公共財供給というテーマに特化しているが、微分ゲームの基礎概念とその導出法を理解するのに非常に有益である。Tsutsui-Mino-Shimomura の非線形フィードバック解についての解説も丁寧に行っている。

以上を踏まえると日本人研究者にとって本書の位置づけはどのようになるだろうか。既に動学最適化の手法を知っている人なら柴田・竹田（1997)、板谷（2006）辺りに挑戦することで微分ゲームのフレーバーに触れながら、次第に微分ゲームの性格が分かってくるであろう。特に柴田・竹田（1997）も板谷（2006）も公共財モデルに限定しているので、その分野を専攻するならば本書を読むのはオプションであり必須ではない。だがそれ以外の分野で微分ゲームを使いこなそうとすれば本書に挑戦すべきである。特に本書は既述の通り産業組織論・経営学・マーケティング論における応用例が豊かである。

5 結論

本書の登場は Dockner *et al.* (2000) 以来の微分ゲーム理論における大きな貢献である。本書はバランスの良さを最大の特長としており Dockner *et al.* (2000) から約 10 年が経過した今、本書は微分ゲームの研究・教育に大きく資するだろう。特に大学院のコースワークでハミルトン関数やベルマン方程式といった動学最適化のマニュアルだけを学んだ人にとっては動学最適化の基礎から丁寧に学べるという意味で貴重な存在である。動学最適化の本と微分ゲームの本を別々に勉強する必要がなくなったわけである[12)]。

ただこれは他書の意義を失わせるものではない。既述の通り他書は意図的に動学最適化または微分ゲームに特化しており、十分な動学最適化理論の知識を持った人にとっては Dockner *et al.* (2000) で微分ゲームに直行する方が効率的である。ただ複数の専門書や教科書を並行的に使うことで理解が深まることが微分ゲームにもいえる。よって微分ゲームを本格的に勉強しようという人は本書 1 冊よりは Dockner *et al.* (2000) なども合わせて参照することを勧める。

12) だが本書がオープンループ・ゲームとその解析に必要な変分法・最大値原理に議論を絞り、フィードバック・ゲーム及びその解析に必要な動学計画法の勉強は他書に頼らねばならない。

また本書は産業組織論における例は多いがその他の分野の例は弱いので、マクロ経済学及び環境・資源経済学ならば Dockner *et al.* (2000) を、公共経済学ならば柴田・竹田（1997)、板谷（2006）に別途挑戦することを強く勧める。

参考文献

[1] Basar, T. and G. J. Olsder (1995), *Dynamic noncooperative game theory* 2nd edition, London: Academic Press.

[2] Chiang, A. C. (1992), *Elements of dynamic optimization*, New York: McGraw-Hill.

[3] Dockner, E. J., S. Jorgensen, N. V. Long and G. Sorger (2000), *Differential games in economics and management science*, Cambridge: Cambridge University Press.

[4] Long, N. V. (2010), *A survey of dynamic games in economics*, Worth Scientific.

[5] Kamien, M. I. and N. L. Schwartz (1991), *Dynamic optimization* 2nd edition, Amsterdam: Elsevier.

[6] Mehlmann, A. (1988), *Applied differential games*, New York: Plenum Press.

[7] Seierstad, A. and K. Sydsaeter (1986), *Optimal control theory with economic applications*, Amsterdam: Elsevier.

[8] Shimomura, K. (1991), 'The feedback equilibria of a differential game capitalism', *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 317-338.

[9] Tsutsui, S. and K. Mino (1990), 'Nonlinear strategies in dynamic duopolistic competition with sticky prices', *Journal of Economic Theory*, 52, 136-161.

[10] 板谷淳一 (2006), 「公共財の自発的供給と推測的変動」, 西村和雄・福田慎一編『非線形均衡動学』, 第 9 章, 東京大学出版会.

[11] 柴田章久・竹田之彦 (1997), 「経済学における微分ゲーム理論の応用について」, 経済学雑誌（大阪市立大学), 98, 1-22.

[12] 下村和雄 (2003), 「越境的環境汚染への動学ゲーム論的アプローチ」, 国民経済雑誌, 185, 35-43.

[13] 下村和雄 (2004), 「越境的環境汚染への動学ゲーム論的アプローチ－国際的ならびに時間的な相互依存関係－」, 池田三郎・酒井泰弘・多和田眞編『リスク、環境および経済』第 9 章, 勁草書房.

[14] 三野和雄 (1985), 「経済システムの最適制御と時間整合性問題 I」, 広島大学経済論叢, 8, 55-81.

[15] 三野和雄 (1986), 「経済システムの最適制御と時間整合性問題 II」, 広島大学経済論叢, 9, 73-98.